

第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

初二 第2试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 实数 a, b, c, d 满足:① $a + b = c + d$;② $a + d < b + c$;③ $c < d$. 则 a, b, c, d 的大小关系是()

(A) $a < c < d < b$. (B) $b < c < d < a$. (C) $c < d < a < b$. (D) $c < d < b < a$.

2. 下列等式中不恒成立的是()

(A) $\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+b}{b}$.

(B) $\frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1} = \frac{a}{a+1} \cdot \frac{b}{b+1}$.

(C) $a + \frac{a}{a^2-1} = a^2 \cdot \frac{a}{a^2-1}$.

(D) $\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3} = \frac{a+b}{a+(a-b)}$.

3. 一组数据由五个正整数组成,中位数是4,且唯一的众数是7,则这五个正整数的平均数等于()

(A) 4.2 或 4.4. (B) 4.4 或 4.6. (C) 4.2 或 4.6. (D) 4.2 或 4.4 或 4.6.

4. 化简: $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} =$ ()

(A) 1. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) 2.

5. Put 8 identical balls into 3 different boxes, each box has at least 2 balls. How many different ways to put the balls? ()

(A) 6. (B) 12. (C) 18. (D) 36.

(英汉词典:identical 完全相同的)

6. 如图1,在平面直角坐标系内,A、B、C三点的坐标分别是(0,0),(4,0),(3,-2),以A、B、C三点为顶点画平行四边形,则第四个顶点不可能在()

(A) 第一象限. (B) 第二象限. (C) 第三象限. (D) 第四象限.

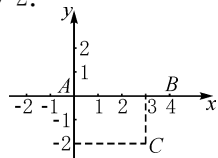


图1

7. 如图2,设点A、B是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上的两点,AC、BD都垂直于y轴,垂足分别是C、D.连接OA、OB,若OA交BD于点E,且 $\triangle OBE$ 的面积是2011,则梯形AEDC的面积是()

(A) 2009. (B) 2010. (C) 2011. (D) 2012.

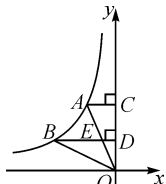


图2

8. 如图3,在矩形ABCD中,AB=6,BC=8,P是AD上的动点,PE \perp AC于E,PF \perp BD于F,则PE+PF的值是()

(A) 4.6. (B) 4.8. (C) 5. (D) 7.

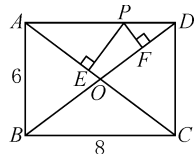


图3

9. 设 a, b 是实数,且 $\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} = \frac{1}{b-a}$, 则 $\frac{1+b}{1+a} + \frac{1+a}{1+b}$ 的值是()

(A) 3. (B) -3.
(C) $3(b-a)$. (D) 无法确定的.

10. 循环节长度是4的纯循环小数化成最简分数后,分母是三位数,这样的循环小数有()

(A) 798个. (B) 898个. (C) 900个. (D) 998个.

二、填空题(每小题4分,共40分.)

11. 若 $a \neq 0$, 计算: $a^{2012} \div a^{2011} \div a =$ _____.

12. 若以 x 为未知数的方程 $\frac{2x+a}{x+2} = -1$ 的根是负数, 则实数 a 的取值范围是 _____.

13. 若 $n (n \neq 0)$ 是以 x 为未知数的方程 $x^2 - mx - 5n = 0$ 的根, 则 $m - n$ 的值是 _____.

14. 正整数 a, b 满足等式 $\frac{13}{15} = \frac{a}{3} + \frac{b}{5}$, 那么 $a =$ _____, $b =$ _____.

15. 已知 $x + \frac{1}{x} = 6 (0 < x < 1)$, 则 $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的值是 _____.

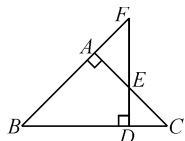


图 4

16. 已知点 $A(4, m), B(-1, n)$ 在反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象上, 直线 AB 与 x 轴交于点 C . 如果点 D 在 y 轴上, 且 $DA = DC$, 则点 D 的坐标是 _____.

17. 如图 4, 等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, 底边 BC 的长为 10, 点 D 在 BC 上, 从 D 作 BC 的垂线交 AC 于点 E , 交 BA 的延长线于点 F , 则 $DE + DF$ 的值是 _____.

18. 如图 5, 在边长为 6 的菱形 $ABCD$ 中, $DE \perp AB$ 于点 E , 并且点 E 是 AB 的中点, 点 F 在线段 AC 上运动, 则 $EF + FB$ 的最小值是 _____, 最大值是 _____.

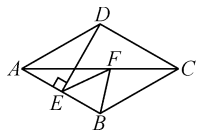


图 5

19. 若实数 a, b, c 满足 $\frac{ab}{a+b} = 3, \frac{bc}{b+c} = 4, \frac{ca}{c+a} = 5$, 则 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ 的值是 _____.

20. Suppose $M = abc321$ is a 6-digit number. a, b , and c are three different 1-digit numbers, and not less than 4. If M is a multiple of 7, then the minimum value of M is _____.

(英汉词典: multiple 倍数)

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

如图 6, 直线 $y = x + b (b \neq 0)$ 交坐标轴于 A, B 两点, 交双曲线 $y = \frac{2}{x}$ 于点 D ,

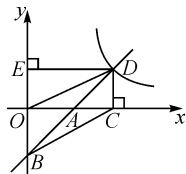


图 6

从点 D 分别作两坐标轴的垂线 DC, DE , 垂足分别为 C, E , 连接 BC, OD .

(1) 求证: AD 平分 $\angle CDE$.

(2) 对任意的实数 $b (b \neq 0)$, 求证: $AD \cdot BD$ 为定值.

(3) 是否存在直线 AB , 使得四边形 $OBCD$ 为平行四边形? 若存在, 求出直线的解析式; 若不存在, 请说明理由.

22. (本题满分 15 分)

如图 7, 在一条平直公路的前方有一陡峭的山壁, 一辆汽车正以恒定的速度沿着公路向山壁驶去.



图 7

(1) 若汽车的行驶速度是 30m/s , 在距离山壁 925m 处时汽车鸣笛一声, 则经过多长时间后司机听到回声?

(2) 某一时刻, 汽车第一次鸣笛, 经过 4.5s 再次鸣笛. 若司机听到两次鸣笛的回声的时间间隔是 4s , 求汽车的行驶速度.

(已知声音在空气中的传播速度是 340m/s .)

23. (本题满分 15 分)

生产某产品要经过三道工序, 同一个人在完成这三道工序时所用的时间相同. 甲、乙二人同时开始生产, 一段时间后, 甲恰好完成第 k 个产品的生产, 此时, 乙正好在进行某个产品的第一道工序的操作. 若甲、乙的生产效率比是 $6:5$, 问此时乙至少生产了多少产品?

