

第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

初三 第 2 试试题

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分.)

1. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-\frac{1}{2}, 2)$, 则 k 的值为()

- (A) -1. (B) 1. (C) -4. (D) 4.

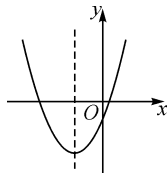


图 1

2. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图 1 所示, 则下列代数式的值恒为正值的是()

- (A) abc . (B) ac . (C) bc . (D) ab .

3. 若存在 $1 \leq x \leq 2$, 使得 $|ax^2 - 1| - 2 > 0$, 则 a 的取值范围是()

- (A) $a < -\frac{1}{4}$. (B) $a > \frac{3}{4}$.
 (C) $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$. (D) $a < -\frac{1}{4}$ 或 $a > \frac{3}{4}$.

4. 直线 $y = \frac{|k|}{k}x$ 总是下列哪个函数图象的对称轴?()

- (A) $y = |k|x$. (B) $y = \frac{k}{x}$. (C) $y = kx^2$. (D) $y = kx$.

5. 若实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = 1, b^2 + c^2 = 2, c^2 + a^2 = 3$, 则 $ab + bc + ca$ 的最小值为()

- (A) $-\sqrt{3}$. (B) $-\sqrt{2}$. (C) $-\sqrt{6}$. (D) $\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$.

6. 如图 2, 双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 经过 $\text{Rt}\triangle AOB$ 的斜边 AB 的中点 C , $AF \perp AO, BF \perp BO$, AF, BF 与双曲线分别交于点 D, E . 若 $OA = 8, OB = 6$, 则四边形 $ODFE$ 的面积是()

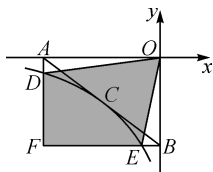
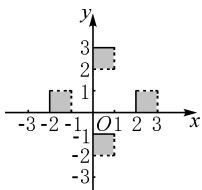


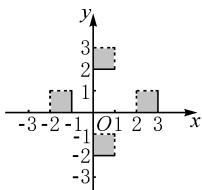
图 2

- (A) 12. (B) 24. (C) 36. (D) 40.

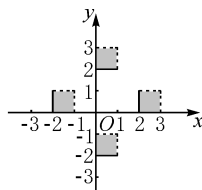
7. 对于实数 a , 规定 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数, 如 $[2.1] = 2, [-1.5] = -2$. 则方程 $[x]^2 + [y]^2 = 4$ 的解在 xOy 坐标系中的图象是()



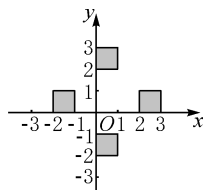
(A)



(B)



(C)



(D)

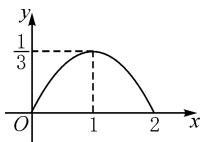
8. 某商店对于某个商品的销售量与获利做了统计, 得到下表:

销售量(件)	100	200	300
获利(万元)	7	9	9

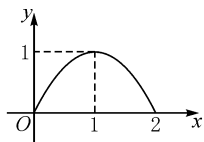
若获利是销售量的二次函数, 那么, 该商店获利的最大值是()

- (A) 9 万元. (B) 9.25 万元. (C) 9.5 万元. (D) 10 万元.

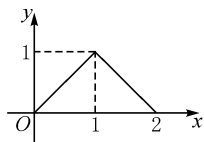
9. 如图3, 已知长方形 $ABCD$ 的边长 $AB=3, AD=2, E$ 点在 BC 边上, 且 $AE \perp EF, EF$ 交 CD 于 F . 设 $BE=x, FC=y$, 则当点 E 从点 B 运动到点 C 时, y 关于 x 的函数图象是()



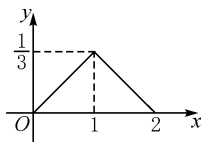
(A)



(B)



(C)



(D)

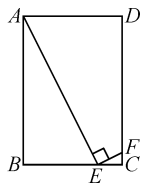


图3

10. 若凸 n 边形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 适合以下条件:

(1) $\angle A_1 = 100^\circ$

(2) $\angle A_{k+1} = \angle A_k + 8^\circ, k = 1, 2, \dots, n-1$.

则 n 的值是()

(A) 5.

(B) 6.

(C) 7.

(D) 8.

二、填空题(每小题4分,共40分.)

11. 若 $\triangle ABC$ 是半径为1的圆的内接三角形, $BC = \sqrt{3}$, 则 $\angle A =$ _____.

12. 方程 $\frac{1}{x-2012} - \frac{1}{x-2014} = \frac{1}{x-2016} - \frac{1}{x-2018}$ 的解是 $x =$ _____.

13. 如图4, P 是等边 $\triangle ABC$ 内一点, $AP = 3, PB = 4, PC = 5$, 则 $\angle APB =$ _____.

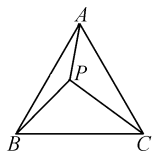


图4

14. 边长为整数, 且周长为2012的等腰三角形有 _____ 个.

15. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m-1)x + (m^2 - 1) = 0$ 有两个不相等的实数根 α, β , 若 $\alpha^2 + \beta^2 = 4$, 则 $m =$ _____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(-1, 5), B(6, -2), C(-1, -2)$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆半径的长度为 _____.

17. 已知坐标平面 xOy , $\text{Rt}\triangle ABC$ 中的直角顶点是 $A(2, \sqrt{5})$, 点 B 与点 O 重合, 点 C 在坐标轴上, 则点 C 的坐标是 _____.

18. 已知 $x + 3y + 5z = 0$, 并且 $x + 2y + 3z = 0$, 则 $\frac{x^2 - y^2 + 3z^2 + xy + 3yz - 2zx}{x^2 + 3y^2 - z^2}$ 的值等于 _____.

19. α 和 β 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根, α^2 和 β^2 是 $x^2 + mx + n = 0$ 的两根, 点 (m, n) 在一次函数 $y = kx + (n-3)$ 的图象上, 则此函数的解析式是 _____, 它的图象与 xOy 坐标平面内的坐标轴围成的图形的面积是 _____.

20. 如图5, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, 两条对角线的交点为 O . $\odot O$ 与 AD 相切, 并与以 AD 为直径的 $\odot O'$ 内切. 已知 AD 长为 h , 则梯形 $ABCD$ 的面积是 _____.

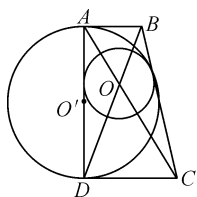


图5

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分10分)

解方程 $x^4 + (x-2)^4 - 82 = 0$.

22. (本题满分 15 分)

如图 6 所示, 已知二次函数 $y = -x^2 + bx + 8$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C , 且 $B(4, 0)$.

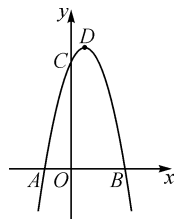


图 6

(1) 求二次函数的解析式及其图象的顶点 D 的坐标;

(2) 如果点 $M(p, 0)$ 是 x 轴上的一个动点, 则当 $|MC - MD|$ 取得最大值时, 求 p 的值;

(3) 如果点 $E(m, n)$ 是二次函数 $y = -x^2 + bx + 8$ 的图象上的一个动点, 且 $\triangle ABE$ 是钝角三角形, 求 m 的取值范围.

23. (本题满分 15 分)

给你若干个边长都是 1 的正三角形, 正方形, 正五边形, 正六边形, 从其中任选两种 (个数不限), 将它们拼接, 要求是:

- ① 使某边重合;
- ② 两种图形中的任何一种不得有公共部分.

问: (1) 用选出的两种图形围成正 n 边形, 如: 用 3 个正方形和 3 个正六边形围成一个正三角形 ABC (图 7).

请你再举两例, 并作图说明.

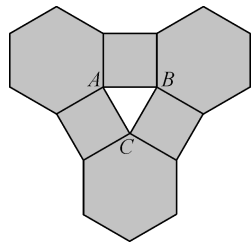


图 7

(2) 对于 (1) 中的正 n 边形, 求它的外接圆的半径.

初三 第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
答案	A	D	D	B	B	C	C	B	A	B	
题号	11		12		13		14		15		16
答案	60° 或 120°		2015		150°		502		2-√3		$\frac{7\sqrt{2}}{2}$
题号	17			18		19				20	
答案	$\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ 或 $\left(0, \frac{9}{5}\sqrt{5}\right)$			$-\frac{5}{6}$		$y = -\frac{1}{2}x - 2; 4$				$\frac{h^2}{2}$	

21. $x = 3$ 或 $x = -1$.

22. (1) D 点的坐标是 $(1, 9)$.

(2) $p = -8$.

(3) 当 $m < 1 - 2\sqrt{2}$ 且 $m \neq -2$, 或 $m > 1 + 2\sqrt{2}$ 且 $m \neq 4$ 时, $\triangle ABE$ 是钝角三角形.

23. (1) 略.

(2) 边长为 1 的正六边形的外接圆的半径是 1.