

# 第二十五届“希望杯”全国数学邀请赛

## 初三 第2试试题

### 一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. If both  $a$  and  $c$  are real numbers, 2 and 3 are the two solutions of the equation  $ax^2 - 10x + c = 0$  for  $x$ , then the value of  $a + c$  is ( )  
 (A) 10. (B) 12. (C) 14. (D) 16.
2. 如图1,在 $\triangle ABC$ 中, $BC > CA > AB$ , $D$ 、 $E$ 、 $F$ 分别是 $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$ 边上的点, $DE \parallel AC$ , $FD \parallel CB$ ,若 $AD : DB = 1 : 2$ ,则图中的相似三角形有( )对.  
 (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.
3. 若 $a - b = 4$ , $ab + c^2 + 4 = 0$ ,则 $a$ 的值是( )  
 (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.
4. 将抛物线 $y = x^2$ 先向左平移1个单位,再向下平移2个单位,则所得的抛物线的解析式是( )  
 (A)  $y = x^2 - 2x + 1$  (B)  $y = x^2 + 2x - 1$  (C)  $y = x^2 + 4x + 3$  (D)  $y = x^2 - 2x - 1$ .
5. 若 $3x^2 - x = 1$ ,则 $9x^4 + 12x^3 - 2x^2 - 7x + 2014$ 的值是( )  
 (A) 2013. (B) 2014. (C) 2015. (D) 2016.
6. 半径分别是1,2的 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相外切,若半径是3的 $\odot O_3$ 和它们都相切,则满足条件的 $\odot O_3$ 的个数是( )  
 (A) 6. (B) 3. (C) 4. (D) 5.
7. 给如图2所示的无水游泳池注水,如果进水速度是均匀的,那么,泳池内水的高度 $h$ 随时间 $t$ 变化的图象可能是( )

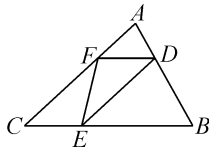


图1

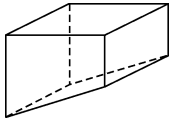
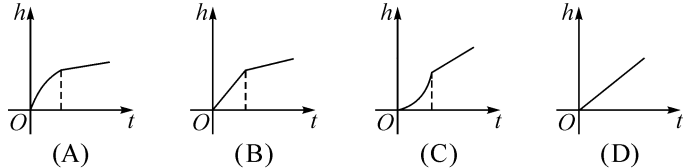


图2



8. 三角形内的一点和三角形三个顶点的连线将三角形分成三部分,若这三部分的面积比是 $1 : 2 : 3$ ,则这样的点的个数是( )  
 (A) 1. (B) 3. (C) 6. (D) 9.
9. Given positive integer  $m$  which is no larger than 10, and  $m^{2014} + 2014^m$  can be divided by 5, then the number of such  $m$  is ( )  
 (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

10. 如图3,在平面直角坐标系 $x - O - y$ 中,点 $A(2,0)$ , $M(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ , $N(5, 2\sqrt{3})$ , $NB \perp x$ 轴于点 $B$ , $P$ 为 $MN$ 上一动点,则 $PA + PB$ 的最小值为( )  
 (A)  $3\sqrt{3}$ . (B)  $2\sqrt{3}$ . (C)  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ . (D)  $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ .

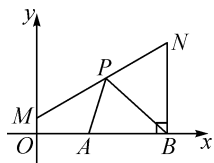


图3

### 二、填空题(每小题4分,共40分.)

11. 若 $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )的图象如图4所示,则 $abc$ 的值是\_\_\_\_\_ (填:“正数”、“负数”或“0”).
12. 若关于 $x$ 的方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个负根,则直线 $y = px + q$ 不经过第\_\_\_\_\_象限. (填:“一”、“二”、“三”或“四”)
13. 已知 $\begin{cases} x + xy + y = 6, \\ x^2 + y^2 = 12, \end{cases}$ 则 $x^3 + y^3$ 的值是\_\_\_\_\_.
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 8$ , $BC = 6$ , $\angle ACB = 90^\circ$ , $CD \perp AB$ 于点 $D$ ,若 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle BCD$

的内切圆的半径分别是  $r_1, r_2, r_3$ , 则  $r_1 + r_2 + r_3$  的值是 \_\_\_\_\_.

15. 若关于  $x$  的方程  $x^2 - (m+5)|x| + 4 = m$  恰有 3 个实数解, 则实数  $m =$  \_\_\_\_\_.

16. 在平面直角坐标系  $x-O-y$  中, 若直线  $x = -1, x = 3, y = 3, y = kx - 2$  围成的四边形的面积是 16, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

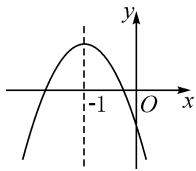


图 4

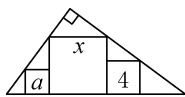


Fig. 5

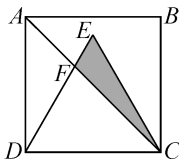


图 6

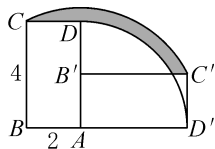


图 7

17. As shown in Fig. 5, there are 3 squares in the right triangle. The sides of the two smaller squares are  $a$  and 4. The side of the square in the middle is  $x$ , then  $x =$  \_\_\_\_\_ (in terms of  $a$ ).

18. 如图 6, 在边长为 2 的正方形  $ABCD$  内有等边三角形  $CDE$ ,  $AC$  交  $DE$  于点  $F$ , 则  $S_{\triangle CFE} =$  \_\_\_\_\_.

19. 如图 7, 将长为 4, 宽为 2 的长方形  $ABCD$  绕顶点  $A$  顺时针旋转  $90^\circ$  到达  $AB'C'D'$ , 图中的两段弧线分别是顶点  $C, D$  经过的路径, 则阴影部分的面积为 \_\_\_\_\_ ( $\pi$  取 3)

20. 长与宽的比是  $2:1$  的长方形称为“特征长方形”. 用宽分别为  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  ( $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ ) 的 5 个“特征长方形”拼成的大长方形, 记为  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ , 则大长方形  $(1, 2, a_3, a_4, a_5)$  的面积最大是 \_\_\_\_\_.

三、解答题 每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分) 如图 8, 在边长为 1 的正方形  $ABCD$  中, 以  $A$  为圆心、 $AB$  为半径的弧与以  $DC$  为直径的半圆交于点  $E$ , 连结  $DE$  并延长交  $BC$  于  $F$ , 连结  $BE$  并延长交  $DC$  于  $G$ .

(1) 求  $DG:GC$  的值;

(2) 求四边形  $EFCG$  的面积.

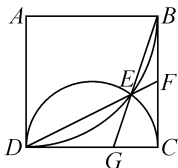


图 8

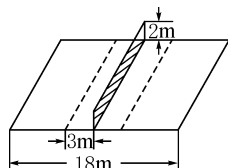


图 9

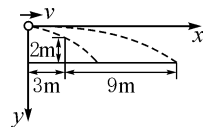


图 10

22. (本题满分 15 分) 如图 9, 排球总长 18m, 设球网高为 2m, 运动员站在离网 3m 的线上 (图中虚线所示) 正对网前跳起将球水平击出. 以击球点为原点, 建立如图 10 的直角坐标系, 球运动的轨迹方程是  $y = \frac{5x^2}{v^2}$  ( $x, y$  单位: m), 其中  $v$  是球被击出时的速度 (单位: m/s).

(1) 设击球点在 3m 线的正上方, 高度为 2.5m, 求使球既不触网也不出界的击球速度的范围;

(2) 若击球点在 3m 线的正上方, 当高度小于  $h$  (单位: m) 时, 无论水平击球的速度多大, 球不是触网就是越界, 求  $h$ .

23. (本题满分 15 分) 如图 11, 有一束光线, 从中心为  $O$  的圆环的  $A$  点射入, 在圆环内经过两次反射后从  $A$  点射出; 如图 12, 从  $A$  点射入的光线经过三次反射后从  $A$  点射出.

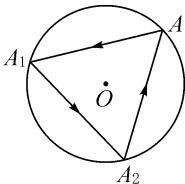


图 11

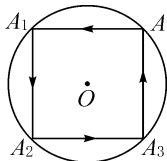


图 12

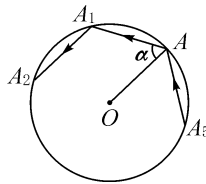


图 13

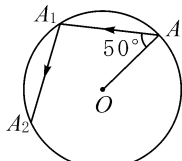


图 14

(1) 如图 13, 若从  $A$  点射入的光线经过五次反射后从  $A$  点射出, 求从  $A$  点射入的光线和圆环半径  $OA$  的夹角  $\alpha$  的度数;

(2) 如图 14, 若从  $A$  点射入的光线和圆环半径  $OA$  的夹角是  $50^\circ$ , 则经过几次反射后光线从  $A$  点射出?

## 初三 第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	A	B	D	D	A	C	C	A
题号	11		12		13		14		15	
答案	负数		四		40		4.8		4	
题号	16		17		18		19		20	
答案	1		$a+4$		$2\sqrt{3}-3$		$2\sqrt{3}-1$		2030	

21. (1)  $\frac{DG}{GC}=2.$

(2)  $S_{CGEF} = \frac{7}{60}.$

22. (1) 击球速度的范围是  $3\sqrt{10} < v < 12\sqrt{2}$  ;

(2) 若击球点在 3m 线的正上方  $\frac{32}{15}$  m 处, 则无论水平击球的速度多大, 球不是触网就是越界.

23. (1)  $\alpha = 60^\circ$  .

(2) 经过 8 次反射后, 从 A 点出来.