

第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第1试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 集合 $P = \{x \mid |x| \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$, $Q = \{x \mid |\sqrt{x} - 1| \leq 1, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $P \cap Q =$ ()
(A) $(0, 1)$. (B) $\{0, 1\}$. (C) $[0, 1]$. (D) $[-1, 1]$.

2. 已知 $x > 0$, $A = \log_3(1 + \sqrt{x})$, $B = \log_4 x$, 则 A 与 B 的大小关系是 ()
(A) $A > B$. (B) $A = B$. (C) $A < B$. (D) 随 x 的值而定.

3. 有若干同心圆, 其半径是公比为 q ($q > 1$) 的等比数列, 相邻的两个圆组成一个圆环, 则这些圆环的面积 ()

(A) 不是等比数列. (B) 是等比数列, 公比为 q .
(C) 是等比数列, 公比为 q^2 . (D) 是等比数列, 公比为 $q^2 - 1$.

4. 设 a, b 是两个非零向量, 则“ a 和 b 同向”是“ $(a \cdot b)^2 = (a \cdot a)(b \cdot b)$ ”的 ()
(A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.
(C) 充分且必要条件. (D) 既不充分也不必要条件.

5. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $3^x + 5^{-y} \leq 3^y + 5^{-x}$, 则下列关系式中成立的是 ()
(A) $e^{x-y} \geq 1$. (B) $e^{y-x} \geq 1$. (C) $\ln(x-y) \geq 0$. (D) $\ln(y-x+1) \geq 1$.

6. The range of values for the function $y = x + \sqrt{1-x^2}$ is ()
(A) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. (B) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. (C) $[-1, \sqrt{2}]$. (D) $(-1, \sqrt{2})$.

7. 方程 $x + y - 2 + x\sqrt{x^2+2} + (y-2)\sqrt{y^2-4y+6} = 0$ 的正整数解的个数是 ()
(A) 1. (B) 2. (C) 5. (D) 无穷多.

8. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = a$, $AB = 2a$, M, N, E 分别是 AB, AC, A_1B_1 的中点, 那么平面 BCE 与平面 MNE 所成二面角的余弦值是 ()

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{7}}{7}$. (D) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

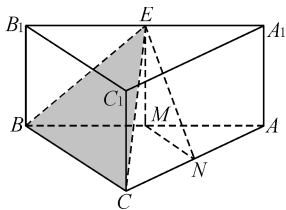


图 1

9. 椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 的内接正方形的面积和内接矩形的最大面积的比等于 ()

(A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{4}{5}$. (C) $\frac{5}{6}$. (D) $\frac{7}{8}$.

10. 定义: 过双曲线焦点的直线与双曲线交于 A, B 两点, 则线段 AB 称为该双曲线的焦点弦. 已知双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, 那么过该双曲线左焦点, 长度为整数且不超过 2012 的焦点弦的条数是 ()

(A) 4005. (B) 4018. (C) 8023. (D) 8036.

二、A 组填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. 若定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 满足: $f(x) + g(x) = x^2 + x + 1$, 则 $g(2) =$ _____.

12. 函数 $y = e^{2x+1} - e^x (x \in \mathbf{R})$ 的单调递减区间是 _____.

13. 平面直角坐标系中, 已知点 $A(2, 1)$, 动点 B 在 x 轴上, 动点 C 在直线 $y = x$ 上, 那么 $\triangle ABC$ 的周长的最小值是 _____.

14. 已知 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$, 则 $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) =$ _____.

15. 设 $A = \left\{ n \mid \frac{2011^n + 2013^n}{2012} \in \mathbf{Z}^+, n \in \mathbf{Z}^+ \right\}$, 将 A 中的元素从小到大地排列为: a_1, a_2, \dots , 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2012} =$ _____.

16. 已知数列 $\{x_n\}$ 中, $x_1 = 3, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}$, 则数列 $\{x_n\}$ 的通项公式 $x_n =$ _____.

17. 设 A 是半径为 5 的 $\odot O$ 上的一个定点, 单位向量 \mathbf{b} 在 A 点处与 $\odot O$ 相切, 点 P 是 $\odot O$ 上的一个动点, 且点 P 与点 A 不重合, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{b}$ 的取值范围是 _____.

18. Suppose the equation $x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$ has two unequal real roots x_1, x_2 , which satisfy $|x_i - 1| < 3 (i = 1, 2)$. Then the range of values for the real number k is _____.

19. 如图 2, 在正四面体 $ABCD$ 中, P_1, P_2 是 BC 的 3 等分点, 过这两个分点分别作 CD 的平行线 P_1Q_1, P_2Q_2 , 其中 Q_1, Q_2 在 BD 上, 则点 B 到平面 AP_1Q_1, AP_2Q_2 的距离之比是 _____.

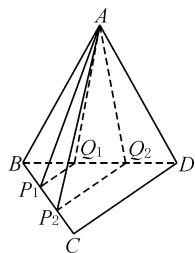


图 2

20. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 正三角形 AF_1F_2 的一边 AF_1 与双曲线左支交于点 B , 且 $\overrightarrow{AF_1} = 4\overrightarrow{BF_1}$, 则双曲线 C 的离心率的值是 _____.

三、B 组填空题(每小题 8 分,共 40 分.)

21. 一个正数的小数部分、整数部分及它自身构成等比数列, 则该数的整数部分是 _____, 小数部分是 _____.

22. 已知正三棱锥的侧面积与底面积之比等于 λ , 则此三棱锥的侧棱与底面边长的比等于 _____, 侧棱与底面所成角的正弦值等于 _____.

23. 设曲线 $y = x^{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点的横坐标为 x_n , 则 $x_n =$ _____, $\log_{2012} x_1 + \log_{2012} x_2 + \dots + \log_{2012} x_{2011} =$ _____.

24. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是 _____. 若函数 $f(x)$ 的图象按向量 $\mathbf{b} = (m, n)$ 平移后, 所得的图象与函数 $g(x) = \sin 2x + 1$ 的图象重合, 且 $|m| < \frac{\pi}{2}$, 则 $\mathbf{b} =$ _____.

25. 已知 $f(x) = \begin{cases} e^{| \ln x |}, & 0 < x \leq 5, \\ -x + 10, & x > 5. \end{cases}$ 若方程 $f(x) = k (k \text{ 是常数})$ 有三个不同的实数根 a, b, c , 且 $a < b < c$, 则 $ab =$ _____, c 的取值范围是 _____.

