第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

高二　第 2 试试题

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分.)

1. 已知集合 $P=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 5, x\in \mathbf{Z}\}$,$Q=\{y \mid y=|x^2-1|, x\in P\}$,则 $P\cap Q$ 中元素的个数是(　　)

(A) 3.　　(B) 6.　　(C) 8.　　(D) 9.

2. 方程 $\log_{13}|x|=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x\right)$ 的实根的个数是(　　)

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8.

3. 命题 p:不经过第一象限的图象所对应的函数一定不是幂函数.

命题 q:函数 $y=x+\frac{2}{x}$ 的单调递增区间是 $[-\sqrt{2},0)\cup[\sqrt{2},+\infty)$,

则下列命题中,真命题是(　　)

(A) $p\wedge q$.　　(B) $(\neg p)\vee q$.　　(C) $(\neg p)\wedge(\neg q)$.　　(D) $p\wedge(\neg q)$.

4. 设 a,c 是正实数,则对于每个实数 t,抛物线 $y=ax^2+tx+c$ 的顶点在 $x-O-y$ 平面内组成的图形是(　　)

(A) 一条直线.　　(B) 一条抛物线.

(C) 一条抛物线的一部分而不是全部.　　(D) 双曲线的一支.

5. The minimum value of the function $y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+4}$ is (　　)

(A) 4.　　(B) $3\sqrt{2}$.　　(C) $2\sqrt{5}$.　　(D) $\sqrt{17}$.

6. 若对于任意实数 x,都有 $t^2+5t\leqslant|2x-4|-|x+2|$ 恒成立,则 t 的取值范围是(　　)

(A) $[1,4]$.　　(B) $[-4,-1]$.

(C) $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$.　　(D) $(-\infty,-4]\cup[-1,+\infty)$.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,则数列 $\{a_n\}$(　　)

(A) 有最大项,没有最小项.　　(B) 有最小项,没有最大项.

(C) 既有最大项又有最小项.　　(D) 既没有最大项也没有最小项.

8. 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right)^2$,则 $f(x)$ 的最小正周期是(　　)

(A) 2π.　　(B) $\frac{3}{2}\pi$.　　(C) π.　　(D) $\frac{\pi}{2}$.

9. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 在点 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 处的切线的方程是(　　)

(A) $y=-x+\sqrt{2}$.　(B) $y=-x+3\sqrt{2}$.　(C) $y=-2x-\sqrt{2}$.　(D) $y=-2x+3\sqrt{2}$.

10. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-2,0)$,$\overrightarrow{OB}=(2,2)$,$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$,则向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角的取值范围是(　　)

(A) $\left[\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$.　　(B) $\left[\frac{7\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$.　　(C) $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$.　　(D) $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.

二、填空题（每小题 4 分，共 40 分.）

11. 函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{x-1}$ 的定义域是__________.

12. 三角式 $\sqrt{6}\tan10^\circ+4\sqrt{2}\cos80^\circ$ 的值等于__________.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的乘积为 $\prod_n$，则 $\prod_{2012}=$__________.

14. How many positive roots does the equation $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^{2012}-x^{2012}+2x+\dfrac{1}{2}=0$ have? __________.

15. 不等式 $\cos2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta>1$ 的解集是__________.

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是三个具有公共起点的非零向量，且 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|=2$，又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，$\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，则当 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{7}$ 时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角是__________.

17. 若数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_1=3$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+1}{2x_n}$，则该数列的通项公式 $x_n=$__________.

18. 已知点 M 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点，且满足 $MA^2+MB^2+MC^2=4$，那么 $\triangle ABC$ 三条边长之积 $AB\cdot BC\cdot CA$ 的最大值是__________.

19. 如图 1，正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$EE'\parallel FF'\parallel BB'$，平面 $AEE'A'$ 与平面 $ABB'A'$ 成 15° 角，平面 $AFF'A'$ 与平面 $ADD'A'$ 成 30° 角. 如果正方体的棱长为 1，那么几何体 $AEF-A'E'F'$ 的体积等于__________.

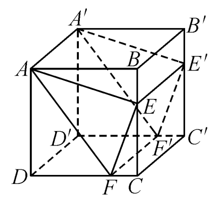

图 1

20. 已知 A，B 是抛物线 $y^2=4x$ 上的两个动点，且 $|AB|=3$，则当 AB 的中点 M 到 y 轴的距离最短时，点 M 的横坐标是__________.

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. （本题满分 10 分）

解不等式 $\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)+\log_a(\sqrt{x^2-2x+10}+x-1)\geqslant\log_a3$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

22. （本题满分 15 分）

已知正三棱锥底面的一个顶点与它所对的侧面的重心的距离为 4，求此正三棱锥的体积的最大值.

23. （本题满分 15 分）

椭圆 C：$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$（$0\leqslant x\leqslant1$，$0\leqslant y\leqslant2$）在第一象限内的一段弧记为 AB，点 $P(x,y)$ 在弧 AB 上，如图 2.

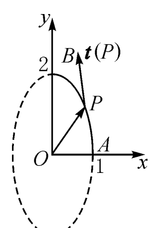

图 2

(1) 用 $\boldsymbol{t}(P)$ 表示椭圆 C 在 P 点处的切线的单位向量，方向是依椭圆的逆时针走向. 求向量 $\boldsymbol{t}(P)$ 的解析式；

(2) 令函数 $f(P)=\boldsymbol{t}(P)\cdot\overrightarrow{OP}$，写出函数 $f(P)\equiv f(x)$ 的解析式；

(3) 求函数 $f(P)$ 的最大值及取得最大值时的点 P 的坐标，并确定函数 $f(P)\equiv f(x)$ 的值域.