

第二十五届“希望杯”全国数学邀请赛

高二 第2试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.以下每个题目的选择支中,仅有一个是正确的.)

1. “ $x > y > 1$ ”是“ $\log_x y < \log_y x$ 成立”的()

- (A) 充分但不必要条件. (B) 必要但不充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既不充分也不必要条件.

2. 当函数 $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ 取最小值时, x 的值是()

- (A) -1. (B) 1. (C) 2. (D) $3\sqrt{2}$.

3. 已知正实数 a, b 满足 $a + b = 1, t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, 则函数 $y = t^x - 1$ 的图象一定经过的象限是

- ()
(A) I、II. (B) I、III. (C) II、IV. (D) III、IV.

4. 若 $\lambda < 4x + y$ 对一切满足 $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 6) < \log_{\frac{1}{2}}(x - y - 1)$ 的 x, y 都成立, 则实数 λ 的最大值是()

- (A) 0. (B) 4. (C) 9. (D) 13.

5. 由一个正方体的顶点所确定的不同平面的个数是()

- (A) 8. (B) 12. (C) 20. (D) 48.

6. Given function $f(x)$ satisfies $f(x + 1) = -f(x)$ with \mathbf{R} as its domain, and when $x \in [0, 1), f(x) = x$. So the number of solutions for equation $f(x) = \log_3 |x|$ is ()

- (A) 6. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

(英汉小词典: domain 定义域)

7. 令 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 则下面四个数中最大的是()

- (A) $\sin(\sin\theta)$. (B) $\sin(\cos\theta)$. (C) $\cos(\sin\theta)$. (D) $\cos(\cos\theta)$.

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_n > 0, a_4 + a_3 - a_2 - a_1 = 5$, 则 $a_5 + a_6$ 的最小值是()

- (A) 10. (B) 14. (C) 16. (D) 20.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle ABC$ 的两个顶点是 $A(3, 0), B(0, 4)$, 若顶点 C 在抛物线 $y^2 = -2x$ 上, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最小值是()

- (A) $\frac{87}{16}$. (B) $\frac{178}{16}$. (C) $\frac{217}{16}$. (D) $\frac{435}{16}$.

10. 如图1, F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线与 C 的左、右两支分别交于 A, B 两点, 若 $|AB| : |BF_2| : |F_2A| = 3 : 4 : 5$, 则 C 的离心率是()

- (A) $\sqrt{13}$. (B) $\sqrt{15}$. (C) 2. (D) $\sqrt{3}$.

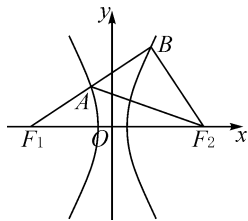


图1

二、填空题(每小题4分,共40分.)

11. 若方程 $x^2 + (2m - 2)x + m^2 + 3 = 0$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 那么, $x_1^2 + x_2^2$ 的取值范围是

_____.

12. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 3$, 代数式 $x^2 + mxy + y^2$ (m 为常数) 的最小值是 $-\frac{3}{2}$, 则 $m =$ _____.

13. 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的周期为 6 的函数, 并且 $f(x) = \begin{cases} 2x, & -3 < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 3, \end{cases}$ 则 $f(f(100)) =$ _____.

14. 设点 M 在 $\triangle ABC$ 内, 且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{3}$, $\angle BAC = 30^\circ$, 若 $\triangle MBC, \triangle MCA, \triangle MAB$ 的面积分别是 $\frac{1}{2}, x, y$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 的最小值是 _____.

15. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2, \frac{a_{3n}}{a_{2n}}$ 为常数 k , 则 $\{a_n\}$ 的前 10 项的和 $S_{10} =$ _____.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 由不等式组 $\begin{cases} |x - y| \leq 1, \\ |2x + y| \leq 2 \end{cases}$ 的解集所围成的区域的面积等于 _____.

17. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ, S_{\triangle ABC} = 1$. 用与 $\angle A$ 两边都相交的直线 m 将 $\triangle ABC$ 的面积二等分, 则直线 m 在 $\triangle ABC$ 内的线段的长度的最小值是 _____.

18. 若抛物线 $y = x^2 - tx + 1$ 与直线 $y = -1$ 有两个不同的交点, 则 t 的取值范围是 _____.

19. 如图 2, 已知棱长为 $\sqrt{10}$ 的正四面体 $ABCD$, 点 E 在 AD 上, 且 $AD = 3AE, F$ 是 AC 的中点, 则点 A 到平面 BEF 的距离是 _____.

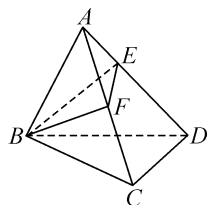


图 2

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ (p 是大于 0 的常数), 过点 $A(-2, -4)$ 且斜率为 1 的直线与 C 相交于点 P_1 和 P_2 , 若 $|AP_1|, |P_1P_2|, |AP_2|$ 成等比数列, 则 C 的方程是 _____.

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

The inequality $\cos 2\theta + a \sin \theta + 2a + 2 < 0$ always holds while $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Find the value range of a .

22. (本题满分 15 分)

已知四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长都是 1, $\angle A_1AD = 60^\circ$.

(1) 求此四棱柱体积的最大值;

(2) 若 $AB \perp AD, \angle A_1AB = 60^\circ$, 求 BD_1 与 A_1D 所成角的余弦值.

23. (本题满分 15 分)

已知椭圆 C 的中心在平面直角坐标系 xOy 的原点, 一个焦点是 $F(0, \sqrt{2})$, 且长轴与短轴的长度比是 $\sqrt{2} : 1$. C 上在第一象限的点 P 的横坐标为 1, 过点 P 作两条倾斜角互补的直线, 分别交 C 于另外两点 A, B . 求:

(1) C 的方程;

(2) 直线 AB 的斜率;

(3) $\triangle PAB$ 面积的最大值.

高二 第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	B	C	C	B	C	D	A	A
题号	11		12		13		14		15	
答案	$(8, +\infty)$		± 3		4		18		20 或 110	
题号	16	17		18			19		20	
答案	$\frac{8}{3}$	$\sqrt{3}-1$		$(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$			1		$y^2 = 2x$	

21. $a < -\frac{3}{2}$.

22. (1) 四棱柱的最大体积是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) BD_1 与 A_1D 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

23. (1) 椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 1$.

(2) $k_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \sqrt{2}$.

(3) $(S_{\triangle PAB})_{\max} = \sqrt{2}$.